左洪超,胡隐樵. 湍流输送的非线性热力学性质. 地球物理学报, 2005, **48**(6):1233～1237

Zuo H C, Hu Y Q. A study on nonlinear thermodynamic characteristics of turbulent transport. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(6):1233～1237

湍流输送的非线性热力学性质

左洪超,胡隐樵

兰州大学大气科学学院,甘肃省干旱气候变化与减灾重点实验室,兰州 730000

摘 要 湍流输送是一种热力学不可逆过程,本文利用非线性热力学研究了湍流输送的特征. 将热力学流对热力学力以平衡态作为参考态进行Taylor展开,可以得到湍流输送系数是系统宏观参量梯度的Taylor级数. 线性湍流输送系数是Reynolds湍流闭合方案的K闭合湍流输送系数;而湍流输送系数非线性项则是系统偏离热力学平衡态所造成的热力学非线性效应. 湍流输送系数这一热力学性质提供了一种热力学湍流闭合方案. 线性湍流输送系数是正定的,湍流输送只能使系统宏观参量均匀化;而在远离平衡态的热力学非线性区,可能导致湍流输送系数负黏性现象. 在最小熵产生态的条件下,热力学流对热力学力Taylor展开的各级系数间存在一种递推关系. 利用这种递推关系大大减少了由实验确定的Taylor级数的系数个数.

关键词 湍流输送,不可逆过程,非线性热力学,湍流闭合,湍流输送系数

文章编号 0001-5733(2005)06-1233-05 **中图分类号** P425 **收稿日期** 2004-05-11,2005-08-01收修定稿

A study on nonlinear thermodynamic characteristics of turbulent transport

ZUO Hong-Chao, HU Yin-Qiao

Key Laboratory of Arid Climatic Changing and Reducing Disaster of Gansu Province, College of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

Abstract For the turbulent transport is a kind of irreversible process in thermodynamics, the nonlinear thermodynamics was applied for studying its characteristics. The turbulent transport coefficients are Taylor series of gradient of averaged variables, when the thermodynamic flows are expanded in Taylor series of the thermodynamic force in neighborhood of the reference state of the equilibrium state. And the linear term of the turbulent transport coefficient corresponds to the turbulent transport coefficient of K closure in the Reynolds turbulence closure scheme, and the nonlinear term of the turbulent transport coefficient is the nonlinear effect caused by the departure of the system from its thermodynamic equilibrium state. The linear term of the turbulent transport coefficient is positive definite and the turbulent transport makes the system homogenous. When the system is in the nonlinear region far from its thermodynamic equilibrium state, the nonlinear term may become negative and huge enough to make the turbulent transport coefficient negative which is called negative gradient turbulent transport. The thermodynamic characteristics of the turbulent transport coefficient can provide a thermodynamic closure scheme for the turbulent flow. Based on the minimum entropy production theorem, a recursive relation among the coefficients of Taylor series will be obtained. Utilizing this recursive relation can reduce greatly the number of Taylor series coefficients that need to be observed by experiments for determining the Taylor series.

Keywords Turbulent transport, Irreversible process, Nonlinear thermodynamics, Turbulent closure, Turbulent transport coefficient

基金项目 国家重点基础研究发展计划(2005CB422003)和国家自然科学基金重点项目(40233035)资助.

作者简介 左洪超,男,1964年生,博士,教授,主要从事大气物理与大气环境研究. E-mail: dblipa@ns.lzb.ac.cn

1 引 言

湍流闭合问题是 19 世纪至今流体力学中尚未解决的经典物理学难题. 湍流问题一直是动力学研究的对象,至今热力学从未涉及过湍流问题. 事实上,湍流输送过程将一个热力学系统的宏观参量均匀化. 显然,湍流输送是一种热力学不可逆过程. 现代非平衡态热力学的成熟,尤其是非线性热力学的发展,为湍流问题的研究开辟了一条新途径. 非平衡态热力学中热力学力是不可逆过程的驱动力,热力学流是不可逆过程发展速率. 根据非平衡态热力学的这一基本概念,可将热力学流对热力学力作 Taylor 级数展开[1]. 另一方面,大气非平衡态热力学研究表明,热力学力是系统宏观参数梯度的函数;如果忽略分子黏性效应,大气系统的热力学流就是湍流输送通量[2]. 若将大气系统的湍流输送通量作为热力学流对热力学力作 Taylor 级数展开,则可得到湍流输送系数是系统宏观参数梯度的 Taylor 级数. 通过研究 Taylor 级数的性质,可以分析湍流输送系数的热力学性质.

湍流输送问题目前都是采用 Reynolds 湍流闭合方案[3]. Reynolds 高阶闭合方案中,每提高一次闭合阶数,都将导入更高阶矩(方差和协方差)的平均量,也就是导入更多的未知数并引入更多的求解这些未知数的方程. 其次,为了闭合 Reynolds 平均方程组,必须在某阶矩上截断,并将更高阶矩进行参数化. 这种参数化必须由实验资料或经验给出,也是相当困难的问题. 问题还在于,无论是从物理上或数学上都无法证明,二阶矩、三阶矩等高阶矩是逐步收敛的. 甚至如 Andre[4]所指出的,三阶矩在截去四阶矩后有不合理增长的趋势. 所以 Reynolds 平均方程组在理论上是无法闭合的. 而且随着高阶矩的引入,方程组中的方程数将成几何级数增加,这就给方程组数学求解带来困难. 原则上 Reynolds 湍流闭合方案应属于数学计算方案,而较少揭示物理本质. 利用非线性热力学理论可能建立一种湍流通量闭合方案. 它比 Reynolds 闭合方法的优点在于不会引入更多新的附加方程;并有可能在理论上证明在一定的大气条件下这些 Taylor 级数是收敛的,数学上给出了级数收敛的判据;甚至有可能对湍流输送的物理本质得到更深的理解.

2 湍流输送的非线性热力学性质以及湍流输送系数的 Taylor 级数

非平衡态是相对于平衡态而言的. 热力学力和热力学流可以表征体系偏离热力学平衡态的程度. 热力学力是产生热力学流的原因,因此可以认为热力学流 J 是热力学力 X 的某种函数 $J(X)$. 假设这种函数关系存在且连续,则可以以平衡态(力和流皆为零的态)作为参考态作 Taylor 展开,对单一过程有

$$J = J(X) = J_0(X_0) + \left(\frac{\partial J}{\partial X}\right)_0 (X - X_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 J}{\partial X^2}\right)_0 (X - X_0)^2 + \cdots\cdots \tag{1}$$

因为平衡态力和流皆为零 $X_0 = 0, J_0 = 0$,于是

$$J(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}L_n X^n, L_n = \frac{\partial^n J(X)}{\partial X^n}. \tag{2}$$

当热力学力很弱时,即体系的状态偏离平衡态很小时,式(2)中包含力 X 的高次幂的项比起第一项要小得多. 假定这些高次幂的项可以忽略不计,则有

$$J = LX. \tag{3}$$

通过对不可逆现象的直接观测,一般也可以总结出在形式上同(3)类似的关系. 这些关系叫做热力学力和热力学流之间的唯(现)象关系. 比例系数 L 称作线性唯象系数. 如果线性唯象系数和热力学力的关系很小,可以近似地看作无关,那么象(3)式那样的唯象关系代表了热力学力和热力学流之间满足线性关系. 当热力学力不是很弱时,也就是说当体系远离热力学平衡态时,展开式(2)中包含有热力学力的高次幂的那些项的贡献比起线性项的贡献可能不再是很小的. 因而必须在展开式中保留这些非线性高次项. 于是热力学流是热力学力的非线性函数,热力学力和热力学流之间是非线性关系.

对于大气系统,热量输送、水汽输送和动量输送的热力学力分别为[2]

$$\left.\begin{aligned} X_{\theta j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}, \\ X_{Vj} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\Delta\mu}{T}\right) = -\frac{R_V}{q}\frac{\partial q}{\partial x_j}, \\ X_{mj} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{U_i}{T}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 θ, q, U_i 和 T 分别为大气位温、比湿、i 方向的风速和绝对温度;R_V 和 $\Delta\mu$ 分别为大气气体常数以及干空气与湿空气化学势之差. 这里,已经假定驱

动热量输送的惟一因素是位温梯度;驱动水汽输送的惟一因素是水汽梯度;驱动动量输送的惟一因素是速度梯度. 虽然不同量的湍流输送之间存在交叉耦合作用[5] ,但在定常、水平均匀的条件下这种作用较小而可以忽略[6] ,大气边界层的观测试验已经部分证明之[7,8]. 所以这一假设在大气观测的精度范围内是可以接受的. 热量输送、水汽输送和动量输送的通量为热力学流,即

$$J_{\theta j} = -\rho c_p \widetilde{K}_\theta \frac{\partial\theta}{\partial x_j},$$

$$J_{Vj} = -\rho \widetilde{K}_V \frac{\partial q}{\partial x_j},$$

$$\tau_{ij} = -\rho \widetilde{K}_m \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \tag{5}$$

其中 $J_{\theta j}$, J_{Vj} , τ_{ij} 分别为大气热量输送通量、水汽输送通量和动量输送通量; ρ , c_p 分别为大气密度和等压比热; $\widetilde{K}_\theta$, $\widetilde{K}_V$, $\widetilde{K}_m$ 分别为热量、水汽和动量输送系数. 如果假定大气湍流输送远大于分子黏性输送,那么 $\widetilde{K}_\theta$, $\widetilde{K}_V$, $\widetilde{K}_m$ 就是湍流输送系数.

现将 Taylor 展开式(2)应用于大气系统,将输送通量作为热力学流对热力学力作 Taylor 展开. 以热量输送通量为例,将(5)式中湍流热量输送通量对(4)式相应的热力学力作 Taylor 展开,即可得到湍流热量输送系数

$$\widetilde{K}_\theta = K_\theta\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{L_{\theta(n+1)}}{L_\theta}\frac{1}{\theta^n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^n\right], \tag{6}$$

其中 $L_{\theta n}$ 是 Taylor 展开第 n 项的系数,并定义线性唯象系数 L_θ 和线性湍流输送系数 K_θ 如下:

$$L_{\theta n} = \frac{\partial^n J_\theta}{\partial X_\theta^n}, L_\theta = L_{\theta 1}, K_\theta = \frac{L_\theta}{\rho c_p \theta}. \tag{7}$$

如果忽略分子黏性输送, J_θ 就是热量的湍流输送通量; $\widetilde{K}_\theta$ 就是湍流输送系数. 线性湍流输送系数相当于 Reynolds 湍流闭合方案中的 K 闭合湍流输送系数. 公式(6)表明,大气热量的湍流输送系数是位温和位温梯度的函数,并决定于 Taylor 系数 $L_{\theta n}$. 同线性唯象系数一样,热力学本身无法得知系数 $L_{\theta n}$. 也就是说,Taylor 系数 $L_{\theta n}$ 必须由实验确定. 这里及后面为了书写的方便,{ $\widetilde{K}_\theta$, K_θ , $L_{\theta n}$, L_θ }都省略了标明方向的下标 j ,一般而言,不同 j 方向的系数{ $\widetilde{K}_\theta$, K_θ , $L_{\theta n}$, L_θ }是不同的.

公式(6)还表明,热量湍流输送系数是位温梯度的 Taylor 级数. 只有当该 Taylor 级数收敛时,湍流输送系数才是有限的,物理上才存在意义. 也就是要求 Taylor 级数(6)的 Taylor 系数满足级数收敛条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\frac{L_{\theta(n+1)}}{L_{\theta n}}\cdot\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)\right| < 1. \tag{8}$$

同样方法(公式(2) ,(4)和(5))分析水汽输送通量和动量湍流通量,并忽略分子黏性效应. 那么就得到水汽湍流输送系数和动量湍流输送系数分别为

$$\widetilde{K}_V = K_V\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{L_{V(n+1)}}{L_V}\left(\frac{R_V}{q}\right)^n\left(\frac{\partial q}{\partial x_j}\right)^n\right], \tag{9}$$

$$\widetilde{K}_m = K_m\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\frac{L_{m(n+1)}}{L_m}\frac{1}{T^n}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^n\right], \tag{10}$$

其中 Taylor 展开的第 n 项系数为

$$L_{Vn} = \frac{\partial^n J_{Vj}}{\partial X_{Vj}^n}; L_{mn} = \frac{\partial^n \tau_{ij}}{\partial X_{mij}^n}, \tag{11}$$

并有线性唯象系数同线性湍流输送系数的关系

$$L_V = L_{V1}, K_V = L_V\frac{R_V}{\rho q};$$

$$L_m = L_{m1}, K_m = \frac{L_m}{\rho T}. \tag{12}$$

Taylor 级数(9)和(10)的收敛条件为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\frac{L_{V(n+1)}}{L_{Vn}}\left(\frac{R_V}{q}\right)^2\left(\frac{\partial q}{\partial x_j}\right)\right| < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\frac{L_{m(n+1)}}{L_{mn}}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)\right| < 1. \tag{13}$$

将关系式(6) ,(9)和(10)改写成

$$\widetilde{K}_\theta = K_\theta\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}K_{\theta n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^n\right],$$

$$K_{\theta n} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{L_{\theta(n+1)}}{L_\theta}\frac{1}{\theta^n}; \tag{14}$$

$$\widetilde{K}_V = K_V\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}K_{Vn}\left(\frac{\partial q}{\partial x_j}\right)^n\right],$$

$$K_{Vn} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{L_{V(n+1)}}{L_V}\left(\frac{R_V}{q}\right)^n; \tag{15}$$

$$\widetilde{K}_m = K_m\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}K_{mn}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^n\right],$$

$$K_{mn} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{L_{m(n+1)}}{L_m}\frac{1}{T^n}. \tag{16}$$

非平衡态线性热力学证明,在热力学第二定律的要求下,线性唯象系数 L_θ , L_V 和 L_m 是正定的[9]. 则由公式(7)和(11)指出,线性湍流输送系数 K_θ 、K_V 和 K_m 也总是正定的. 线性湍流输送系数是 Reynolds 湍流闭合方案的 K 闭合湍流输送系数,Hu[10,11]系统分析过线性湍流输送系数的热力学性质及其对大气

系统的应用. 而湍流输送系数的非线性项,则是系统偏离热力学平衡态所造成的热力学非线性效应. 公式(14)～(16)表明,非线性湍流输送系数 $\widetilde{K}_\theta$、$\widetilde{K}_V$ 和 $\widetilde{K}_m$ 并不能保证总是正定的. 在一定的条件下,它们也可能是负的. 这种湍流输送系数呈负值的现象,被称为湍流负黏性或反梯度输送. 所以湍流负黏性输送,是远离平衡态的热力学非线性区出现的一种热力学非线性效应. 至今大气边界层的负黏性现象,并未得到很好的理论解释. 这里从非线性热力学方面给负黏性现象提供了重要理论依据.

3 最小熵产生态和非线性湍流输送系数的递推关系

非线性湍流输送系数的性质由 Taylor 级数的性质决定,而 Taylor 级数的性质又由 Taylor 系数的性质决定. Hu[10] 曾用线性热力学 Onsager 倒易关系和 Curier-Prigogine 原理分析线性湍流输送系数的热力学性质. 现利用热力学非线性区最小熵产生原理分析 Taylor 系数的性质,继而分析湍流输送系数非线性热力学性质.

最小熵产生原理是非平衡态热力学的重要定理. 这个定理是 Prigogine[9] 在热力学非平衡态线性区证明的,胡隐樵[5,12] 在热力学非平衡态非线性区证明了该定理. 该定理表明,在熵产生取最小值时,热力学非平衡态的线性区和非线性区都应满足如下条件:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial J_{\theta j}}{\partial x_j}+\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha v_{ab}^{\alpha}\lambda_{ab}^{\alpha}+\frac{\partial Q_j^*}{\partial x_j}\right)=0,\\
&\frac{\partial J_{Vj}}{\partial x_j}-\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha v_{ab}^{\alpha}\delta^{\alpha} m_V=0,\\
&\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}=0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

其中 λ_{ab}^{α},ω_α 和 v_{ab}^{α} 分别为相变潜热、相变速率和相变系数;m_V 是水的分子量,δ^{α} 是与水相变有关的一个 δ 函数;$\partial Q_j^*/\partial x_j$ 是辐射热源. 条件(17)表明,在熵产生取最小值时体系的湍流热量输送同水相变潜热释放或耗损以及辐射加热相平衡;水汽输送同水相变导致的水汽增加或耗损相平衡;湍流动量输送平衡. 这时系统的热力学状态称为最小熵产生态. 这是大气系统很重要的一种热力学状态,定态是它的一种特殊形式.

为了研究热力学流对热力学力 Taylor 级数系数的性质,首先研究热量输送的情况. 考虑(14)式后,将(5)式热量输送通量代入湍流热量输送平衡方程(17)中,得到方程

$$
\begin{aligned}
&-\rho c_p K_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}+\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha v_{ab}^{\alpha}\lambda_{ab}^{\alpha}+\frac{\partial Q_j^*}{\partial x_j}-\rho c_p\frac{\partial K_\theta}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\\
&-\rho c_p K_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)K_{\theta n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^n\\
&-\rho c_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial K_\theta K_{\theta n}}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^{n+1}=0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

于是得到关于确定热力学流对热力学力展开 Taylor 级数系数的递推方程

$$
\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^n:(n+1)K_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}K_{\theta n}+\frac{\partial K_\theta K_{\theta(n-1)}}{\partial x_j}=0,\quad n=2,3,\cdots,\infty,
\tag{19}
$$

并有

$$
\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^0:-\rho c_p K_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}+\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha v_{ab}^{\alpha}\lambda_{ab}^{\alpha}+\frac{\partial Q_j^*}{\partial x_j}=0,\quad(n=0),
\tag{20}
$$

$$
\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}=-\frac{1}{\rho c_p K_\theta}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha v_{ab}^{\alpha}\lambda_{ab}^{\alpha}+\frac{\partial Q_j^*}{\partial x_j}\right).
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^1:2K_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}K_{\theta 1}+\frac{\partial K_\theta}{\partial x_j}=0,\\
&K_{\theta 1}=-\left(2K_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}\right)^{-1}\frac{\partial K_\theta}{\partial x_j},\ (n=1).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

关系式(21)表明,位温二阶导数是相变潜热释放或吸收对系统加热或热损耗以及辐射加热的结果,即大气系统的热源所致. 最后从(20)式能得到确定 Taylor 级数系数的如下递推公式:

$$
K_{\theta n}=-\left(K_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}\right)^{-1}\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial K_\theta K_{\theta(n-1)}}{\partial x_j},\quad n=2,3,\cdots,\infty,
\tag{23}
$$

式中位温二阶导数由(21)式确定,而 Taylor 级数系数的一阶系数 $K_{\theta 1}$ 由(22)式确定. 递推公式表明,湍流输送系数的非线性项同线性项以及位温的二阶导数有关. 可见,湍流输送系数的非线性项是系统宏观参量的二阶导数所致. 进而言之,大气系统的热源导致热量湍流输送系数的非线性效应.

类似地,得到有关湿度和动量的湍流输送系数 Taylor 级数系数的递推公式. 有关湿度湍流输送系数 Taylor 级数系数递推公式为

$$
K_{Vn}=-\left(K_V\frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2}\right)^{-1}\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial K_V K_{V(n-1)}}{\partial x_j},\quad n=2,3,\cdots,\infty,
\tag{24}
$$

$$
\frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2}=-\frac{1}{\rho K_V}\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha v_{ab}^{\alpha}\delta^{\alpha} m_V;
$$

$$K_{V1} = - \left(2K_V \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} \right)^{-1} \frac{\partial K_V}{\partial x_j}. \tag{25}$$

关系(25)表明,比湿二阶导数是相变水汽增加或损耗所致,即大气系统的水汽源导致水汽湍流输送系数的非线性效应.

动量湍流输送系数的 Taylor 级数系数的递推公式为

$$K_{mn} = - \left(K_m \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right)^{-1} \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial K_m K_{m(n-1)}}{\partial x_j}, \quad n = 2, 3, \cdots, \infty. \tag{26}$$

对于动量湍流输送必须补充物理假设或从实验上确定风速二阶导数和 Taylor 级数的一阶系数.

以上分析表明,在最小熵产生态的条件下(包括定态),热力学流对热力学力 Taylor 展开的各级系数间存在一种递推关系. 这是在最小熵产生态条件下湍流输送系数的非线性热力学又一重要性质. 原则上可以利用这种递推关系确定最小熵产生态条件下的湍流输送系数二阶以上的各非线性项,仅剩下湍流输送系数的线性项和 Taylor 级数的一阶系数由实验确定. 这样就大大减少了由实验确定的 Taylor 级数的系数个数.

4 结 论

通过以上分析证明湍流输送系数有如下非线性热力学的重要性质:

(1) 湍流输送系数是系统宏观参量梯度的 Taylor 级数. 线性湍流输送系数是 K 闭合湍流输送系数;而湍流输送系数的非线性项,则是系统偏离热力学平衡态所造成的热力学非线性效应.

(2) 线性湍流输送系数是正定的,湍流输送只能使系统宏观参量均匀化;而热力学非线性效应可能导致一种湍流负黏性或反梯度输送现象.

(3) 根据热力学非线性区最小熵产生原理,热力学流对热力学力 Taylor 展开的各阶系数间存在一种递推关系. 利用这种递推关系大大减少了由实验确定的 Taylor 级数的系数个数.

参考文献(References)

[1] 李如生. 非平衡态热力学和耗散结构. 北京:清华大学出版社,1986
Li R S. Non-equilibrium State Thermodynamics and Dissipative Structure (in Chinese). Beijing: Tsinghua University Press, 1986

[2] 胡隐樵. 非平衡态大气热力学研究. 高原气象, 1999, **18**(3): 306～320
Hu Y Q. Research on atmospheric thermodynamics of non-equilibrium state. *Plateau Meteorology* (in Chinese), 1999, **18**(3): 306～320

[3] Stull R B. An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988

[4] Andre J C, Moor G D, Lacarcere P, et al. Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structure of the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 1978, **35**: 1861～1883

[5] 胡隐樵. 大气热力动力学导论. 北京:地质出版社,2002
Hu Y Q. Introduction to Atmospheric Thermodynamic-Dynamics (in Chinese). Beijing: Geological Publishing House, 2002

[6] 胡隐樵. 强迫耗散系统的有序结构和系统的发展(I),最小熵产生原理和有序结构. 物理学报,2003, **52**(6): 1379～1384
Hu Y Q. Ordered structure and system development of the force dissipation system (I), principle of minimum entropy production and ordered structure. *Acta Phys. Sin*-CH. ED. (in Chinese), 2003, **52**(6): 1379～1384

[7] Businger J A, Wynggaard J C, Izumi Y, et al. Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, 1971, **28**: 181～189

[8] 陈子赟,孙鉴泞,袁仁民等. 对流槽湍流涡旋结构特征的小波分析. 地球物理学报,2004, **47**(6):964～970
Chen Z Y, Sun J N, Yuan R M, et al. An analysis of convective boundary layer eddy structure in water tank by orthonormal wavelet. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004, **47**(6): 964～970

[9] Groot S R, Mazur P. Non-equilibrium Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1962

[10] HU Y Q. Application of the linear thermodynamics to atmosphere system (I), linear phenomenological relation and thermodynamic property of the atmosphere system. *Adv. Atmos. Sci.*, 2002, **19**(3): 448～458

[11] HU Y Q. Application of the linear thermodynamics to atmosphere system (II), exemplification of the linear phenomenological relation in the atmosphere system. *Adv. Atmos. Sci.*, 2002, **19**(5): 767～776

[12] 胡隐樵. 热力学非线性区最小熵产生原理和热力学稳定性. 自然科学进展,2002, **12**(2): 1086～1089
Hu Y Q. Principle of minimum entropy production and thermodynamic stability in the thermodynamic non-linear region. *Prog. Nat. Sci.* (in Chinese), 2002, **12**(2): 1086～1089