

湍流强度定理和湍流发展的宏观机制

胡隐樵* 陈晋北 左洪超

(中国科学院寒区旱区环境与工程研究所, 甘肃省干旱气候变化与减灾重点实验室, 兰州 730000; 大气边界层和大气化学国家重点实验室(LAPC), 北京 100029; 兰州大学大气科学学院, 兰州 730000; 甘肃农业大学资源环境系, 兰州 730060)

摘要 湍流是普遍存在而至今仍未被充分理解的自然现象. 简单回顾了湍流理论的发展历史和现状, 指出以不同层次利用和不同方法探讨湍流特征和机制的必要性. 为此利用非平衡态热力学理论将 Reynolds 湍流和 Bénard 湍流统一地表述在动量湍流输送定理和湍流强度定理中. 证明了流体湍流发展的宏观原因是速度剪切效应和温度剪切效应共同作用的结果, 速度剪切效应和温度剪切效应也是湍流场相空间轨线不断拉伸和折叠的宏观原因. 并以大气实验资料证明, 湍流强度唯象系数不仅是速度剪切的函数, 还是温度剪切, 即大气热力层结稳定度的函数. 从而以实验事实证明了湍流强度定理的真实性.

关键词 湍流 非平衡态热力学 线性热力学 大气 边界层 Reynolds 湍流 Rayleigh-Bénard 湍流

湍流是人们经验中每天都遇到的自然现象^[1], 它是自然界最普遍存在的复杂而无序的动力学行为实例之一^[2]. 湍流显现出宽广的空间尺度和时间尺度, 从大气现象到旋转的银河和宇宙尘埃, 甚至化学和生物学领域^[3], 无不显现湍流现象. 湍流存在各种形态, 人们熟知的流体湍流就有高 Reynolds 数的 Reynolds 湍流, 以及高 Rayleigh 数的热对流湍流^[4]或称 Rayleigh-Bénard 湍流, 它们是速度场中的矢量湍流, 与矢量湍流相对应还有标量湍流^[3]. 近来又发现固态的弹性湍流现象^[5]和磁化湍流现象^[6]等. 湍流的空间尺度能从银河尺度 $10^{16}\sim 10^{18}$ km 经行星尺度 $10^3\sim 10^4$ km 直至人类尺度 $10^{-3}\sim 10$ m(包括人类的生活环境大气、海洋、河流, 以及人类家庭生活中厨房的水管等)^[7]. 湍流是一种普遍存在而至今仍未被充分理解的自然现象^[5], 仍是科学和工程各领域科学家所感兴趣的问题.

早在 1839 年 Hagen 就注意到圆管水流存在层流和湍流两种不同性质的流动现象, 1883 年 Reynolds 在圆管水流实验中发现层流向湍流转换的判据 Reynolds 数 R_e 为

$$R_e = \frac{\bar{U}d}{\nu}, \quad (1)$$

其中 \bar{U} 是流体速度尺度, d 是流体空间尺度, ν 是流体运动学分子黏性系数. R_{ec} 是临界 Reynolds 数, 当 $R_e > R_{ec}$ 时出现湍流. 一般 R_{ec} 约为 2000. 人们一开始就认识到湍流是外强迫条件下流体剪切效应产生的一种涡旋运动, 但很难给湍流下能被普遍接受的精确定义^[5]. Hinze^[8]系统地总结了 20 世纪上半叶湍流研究进展, 认为对于流体湍流应用最广的仍是 Taylor 和 Kármán 在 1937 年给出的湍流定义, 即湍流为一种空间和时间上的随机无规则流体运动. 为了定量描述湍流这种随机无规则运动, 1930 年 Dryden 和 Kuethe

收稿日期: 2006-02-20; 接受日期: 2006-07-17
国家自然科学基金项目(批准号: 40633014, 40233035)资助
* E-mail: hyq@ns.lzb.ac.cn

用平均速度 \bar{U} 描述流场平均运动状态, 并用速度脉动均方差 $\sqrt{u'^2}$ 描述湍流的强弱, 速度脉动是瞬时速度与平均速度之差 $u' = U - \bar{U}$ [8]. 速度脉动方差的一半 $e = \frac{1}{2} \overline{\rho u'^2}$ 是总体湍流能量, 这里 ρ 是流体密度.

将速度脉动方差 $\overline{u'^2}$ 定义为湍流强度, 它本质上表述湍流能量大小. 对于没有能源供给的均匀各向同性湍流, 衰减定律(Decay law)证明湍流强度为 [8]

$$\overline{u'^2} (\sqrt{vt})^5 = c, \quad (2)$$

其中 c 为常数, t 指时间, 这是一个相似性实验关系. 湍流衰减定律表明没有能源供给的均匀各向同性湍流强度与 $t^{5/2}$ 成反比地衰减, 直至消亡.

早在 1900 年, 法国学者 Bénard 发现底部加热薄层流体, 当温度梯度达到一定阈值时, 流体突然出现规则的上下对流有序流场结构, 称为 Bénard 热对流. 直至 1916 年 Rayleigh 对 Bénard 热对流给出理论上的解释 [9], 当物理参数 Rayleigh 数

$$R_a = \frac{g \alpha d^3 \Delta T}{\lambda \nu} \quad (3)$$

达到一定阈值 R_{ac} 时, 出现 Bénard 热对流. 其中 α, λ 分别为热膨胀系数和导热系数, $d, \Delta T, g$ 分别为薄层流体高度、温差和重力加速度. Rayleigh 数阈值为 $R_{ac}=1700$, 当 $R_a > R_{ac}$ 时就出现对流, 因此有时称其为 Rayleigh-Bénard 热对流. 1978 年 Gollub 等发现当相对 Rayleigh 数 $R_c^* = R_a / R_{ac} = 65.4$ 时也出现了湍流 [10], 使人们认识到流体温度剪切效应也是产生热力湍流的机理. 所以如果将源于速度剪切的湍流称为 Reynolds 湍流, 那么源于温度剪切的湍流就可称为 Rayleigh-Bénard 湍流(后面简称 Bénard 热力湍流).

1922 年 Richardson 首先发现了大气湍流 [7]. 大气的 Reynolds 数和 Rayleigh 数都特别大, 地球表面附近大气 Reynolds 数一般达到 10^7 甚至更大; 相对 Rayleigh 数也常远超过阈值 $R_c^* = 65.4$. 所以大气边界层中 Reynolds 湍流和 Bénard 湍流都得到充分发展. 大气湍流性质远比实验室尺度的湍流丰富而复杂, 为湍流发展研究提供了一个优异的研究平台. 大气湍流是三维非均匀且各向异性的, 受大气黏性应力和温度热力层结所控制. 对于三维湍流应该用空间三个速度脉动分量 (u', v', w') 描述, 湍流强度是三个

速度分量方差之和 ($\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$). 湍流研究首先是发展湍流唯象模型(phenomenological model), 对此做出突出贡献的是 Kolmogorov [11]. 对于大气边界层湍流研究, Monin 和 Obukhov [12] 首先建立了大气湍流唯象模型, 他们提出的大气边界层相似性理论, 为建立大气边界层湍流理论奠定了基础, 且对于大气边界层 Bénard 热力湍流的研究也很重要. 为度量大气温度热力层结稳定度, 他们首先引入 Monin-Obukhov 大气稳定度长度 L 和大气稳定度参数 ζ

$$L = \frac{-u_*^3 \theta}{\kappa g w' \theta'}, \quad \zeta = \frac{z}{L}. \quad (4)$$

式中 $\theta, \theta', u_*, w' \theta'$ 和 κ 分别是大气位温、位温脉动分量、摩擦速度、垂直湍流输送热通量和 Kármán 常数. 20 世纪 70 和 80 年代学者对大气湍流进行了系统的充分研究, 并取得重要进展 [13,14]. 根据 Monin-Obukhov 大气边界层相似性理论和大量野外观测实验得到湍流强度经验关系:

$$\frac{\overline{u'^2}}{u_*^2} = \phi_1 \left(\frac{z}{L} \right), \quad \frac{\overline{v'^2}}{u_*^2} = \phi_2 \left(\frac{z}{L} \right), \quad \frac{\overline{w'^2}}{u_*^2} = \phi_3 \left(\frac{z}{L} \right). \quad (5)$$

$\phi_{ii}(z/L) (i=1, 2, 3)$ 是 Monin-Obukhov 相似性函数, 大量野外观测实验证明它们有如下形式

$$\phi_{ii} \left(\frac{z}{L} \right) = C_{ii} \left(a_{ii} + b_{ii} \frac{z}{L} \right)^{\gamma_{ii}}, \quad (6)$$

其中 ($C_{ii}, a_{ii}, b_{ii}, \gamma_{ii}$) 是经验常数, 不同研究者在不同实验条件下对经验常数可能取不同的值 [13,14]. 比较一致的结论是, $\gamma_{33}=2/3$, 即有 $\phi_{33} \sim (z/L)^{2/3}$; 对湍流强度垂直分量, 不同研究者测到的平均值 $C_{33} \sim 1.5$, 即 $z/L=0$ 时中性层结下 $\phi_{33} = C_{33} \sim 1.5$. 引入大气温度热力层结稳定度描述大气湍流强度暗示着温度垂直剪切效应对大气湍流的影响, 即大气湍流中包含 Rayleigh-Bénard 热力湍流成分.

传统的湍流描述除了上述唯象模型, 还有统计方法(statistical method)和闭合理论(closure theory)的近似截断方案(truncation scheme), Monin 等 [15,16] 对此做了系统总结. 湍流至今仍是经典物理学中一个难以理解的谜, 湍流的各种特征的描述及其形成机制的解释, 至今未能得到完美解决. Lorenz 混沌理论(chaos theory)的提出 [17], 以全新的视角促使现代湍流动力学理论的发展, 推进了对湍流本质的认识. Bohr

等^[18]系统总结了近 20 年湍流动力学所取得的成就,认为湍流是相空间轨线不断拉伸和折叠竞争经过混沌发展而产生的一种时间和空间无序结构,湍流总是在极大自由度数的混沌系统中发展,所以湍流动力学从“热力学极限(thermodynamic limit)”的概念出发,精练地将湍流定义为相空间无序的混沌系统.湍流研究的动力学方法是以湍流的层叠(串级)图象物理概念为基础的,1922 年 Richardson 发现大气湍流时,就提出“湍流的层叠图象(cascade picture of turbulence)”^[18].湍流的层叠图象指出,“发展的湍流(developed turbulence)”由各种尺度涡旋构成,最大涡旋从平均运动获取能量,并向较小的次级尺度涡旋转递能量,然后该级尺度涡旋能量又向更小尺度涡旋转递,直至转换为分子尺度热能.这就是湍流能量串级图象.1941 年 Kolmogorov 估计了发展的湍流涡旋能量,尺度为 λ 的涡旋能量 $e_\lambda(\lambda) = \rho(\bar{\epsilon}\lambda)^{2/3}$, $\bar{\epsilon}$ 是该级涡旋能量耗散率.系统的各级尺度涡旋所含能量构成了湍流能谱 $e_\lambda(\lambda)$, 系统总体湍流能量为 $e = \frac{1}{2} \rho u'^2 = \int e_\lambda(\lambda) d\lambda$. 流场湍流能量就是各种尺度涡旋速度脉动的贡献,无疑湍流强度是各级尺度涡旋总体湍流能量的度量.正如一个由大量分子构成的系统一样,存在巨大的自由度;一个由大量涡旋构成的湍流系统也存在巨大的自由度.描述湍流的原始方程应该是 Navier-Stokes 方程,但是对于 $Re \gg 1$ 的 Navier-Stokes 方程存在巨大自由度的流体系统直接求解并不现实.例如,人们求解 $Re \approx 10^6$ 的 Navier-Stokes 方程所有相关激活的自由度至少为 10^{14} ,足以使当代最强大的计算机达到饱和^[19].因此人们用 Navier-Stokes 方程谱截断模式(spectrum truncation scheme)减少所研究系统的自由度. Lorenz^[17]就是以谱截断模式发现混沌现象,并进而揭示了流体从混沌向湍流过渡的许多性质.谱截断模式成为研究湍流的基本方法.但是一般谱截断模式最高仅能取 20~30 模(module),由于过于简单的谱截断模式,流体湍流的内在属性丧失过多,以致难于揭示许多湍流性质.因而湍流动力学先后发展了能取高模数的“壳模式”(shell model),其模数一般可取至 100 以上;“耦合格子图”(coupling lattice map)和“细胞自动机”(cellula automata)等模型.这些模型可以称为湍流的动力系统逼近(dynamical systems approach to tur-

bulence),对于研究诸如 3D 湍流能量串级特性;特别是建立结构函数(structure function)、概率分布函数(probability distribution function)、功率谱(power spectrum)等湍流传统的统计学描述与相空间动力学行为之间的桥梁^[18]特别有效.分子动力学所建立的 Boltzmann 方程是研究湍流统计学方法重要工具.由于 Boltzmann 方程是一个微分积分方程,带来求解的困难,限制了它在湍流研究中的应用^[9].近年新发展起来的格子 Boltzmann 方程(lattice Boltzmann equation)在研究湍流方面取得了巨大成功^[19].

上述对湍流研究的回顾阐明了传统湍流研究的历史、特点、优势和局限性.传统湍流研究主要是运用动力学方法,这种方法推进了人们对湍流的微观结构和微观机制的认识.无疑,湍流是一种复杂性现象,必须从不同层次加以研究和理解,特别是从微观和宏观层次加以研究是必要的.但与人们生活密切相关的大量工程问题,更令人感兴趣的是湍流的宏观结构和宏观机制,特别是诸如湍流的宏观起因,湍流对物质和能量的宏观输送问题.例如湍流能稀释大气中的污染,但又使污染物扩散而污染其它地区;湍流对物质和能量的宏观输送是使气候系统物质和能量平衡,并造成气候变化的重要物理过程之一;晴空湍流是飞机航行的重大隐患,为了克服湍流涡旋对潜艇和飞机等的拖曳效应,美国几乎每年耗资达 10 亿美元^[20].这一系列湍流问题都涉及湍流的宏观结构和宏观机制.正如上述,由原始 Navier-Stokes 方程描述的湍流系统是一个存在巨大自由度的系统,非平衡态热力学研究的正是自由度数量极大的系统^[21].非平衡态热力学是一种综合性方法,它能从热力学的概念出发,把握系统的总体属性,演绎出有关湍流的许多新知识,并以实验验证其真实性.所以,非平衡态热力学的发展为研究湍流的宏观结构和宏观机制提供了一条新途径和新视觉.胡隐樵^[9,22,23]发展了大气非平衡态热力学,进一步从大气非平衡态线性热力学观点出发,证明了湍流输送唯象关系、涡旋定理和湍流强度定理^[24];并以大量大气边界层观测实验资料,证明大气边界层的确存在线性唯象关系^[25];而且从理论上证明,大气系统动力过程和热力过程的交叉耦合效应,导致大气边界层能量和物质输送过程除了湍流输送外,还应包括大气辐散和辐合运动对能量和物质的输送^[26].本文的目的就是试图

利用大气非平衡态热力学证明 Reynolds 湍流和 Rayleigh-Bénard 湍流共存于大气系统, 并证明 Reynolds 湍流和 Rayleigh-Bénard 湍流共存时湍流强度定理和动量湍流输送通量定理, 以此揭示湍流的宏观结构和宏观机制; 进一步利用目前所掌握的野外观测资料验证湍流强度定理的真实性, 并确定湍流强度定理的唯象系数.

1 湍流强度定理的证明及湍流发展的宏观原因

非平衡态热力学的一个基本观点是, 一个热力学系统不可逆输送过程的输送通量是不可逆过程发展速率, 并定义其为广义流, 驱动不可逆过程的原因为广义力. 若广义流是广义力的连续可微函数, 则广义流可对广义力做 Taylor 级数展开, 忽略高阶级数项就得到广义流与广义力的线性唯象关系. 流体剪切驱动的湍流黏性输送就是一种不可逆过程. 湍流黏性应力 $\tau_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j}$ ($i, j=1, 2, 3$, 下同) 包括速度协方差 $\tau_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j}$ ($i \neq j$) 和方差 $\tau_{ii} = \rho \overline{u_i'^2}$ ($i=j$) 两部分, 是不可逆过程的广义流. 其中速度方差是湍流强度; 速度协方差是动量湍流输送通量. 驱动湍流黏性输送的广义力 X_{mij} 是流体速度场和温度场的梯度(剪切效应), 即^[8,22,23]

$$X_{mij} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{U_i}{T} \right), \quad (7)$$

式中驱动湍流黏性输送的广义力 X_{mij} 是二阶张量, i 和 j 是张量下标, 而 m 是一个表示动量湍流输送广义力的标识符, U_i 为风速, T 为温度. 因为热通量、水汽通量和气流都是矢量, 水汽比湿是标量, 而湍流黏性应力是二阶张量, 根据 Curier-Prigogine 线性热力学原理^[21,22,23], 二阶张量与矢量或标量间不发生交叉耦合, 所以湍流黏性动量输送过程与热量输送过程、水汽输送过程及水的相变过程不发生交叉耦合, 则动量输送过程的广义流与广义力之间线性唯象关系为^[24]

$$\tau_{ij} = L_{ijkl} X_{mkl}, \quad (8)$$

其中 L_{ijkl} 是湍流黏性输送的线性唯象系数. 湍流黏性动量输送通量 τ_{ij} , 即湍流黏性应力, 和广义力 X_{mij} 都是具有 9 个张量元素的二阶张量, 所以线性唯象系数 L_{ijkl} 是有 81 个分量的四阶张量, 张量下标为 $i, j, k, l(i,$

$j, k, l=1, 2, 3)$. 如果假定湍流黏性应力在各个方向上是相互独立的, 且各方向间无交叉耦合效应, 则唯象系数 L_{ijkl} 就可以收缩为二阶张量 L_{ij} . 将(7)式代入(8)式, 线性唯象关系变为

$$\tau_{ij} = -\rho K_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{U_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (9)$$

式中 ρ 是空气密度, 并定义湍流黏性系数为 K_{ij} , $K_{ij}=L_{ij}/(\rho T)$, 且 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, $K_{ij}=K_{ji}$, L_{ij} 在非平衡态热力学中被称为唯象系数(phenomenological coefficient), 所以湍流黏性系数是唯象系数的线性函数. 这里假定湍流黏性应力是对称二阶张量. (9)式表明, 湍流黏性应力是流体速度场和温度场的剪切效应共同作用的结果.

下面具体分析湍流黏性应力中动量湍流输送通量和湍流强度与流体速度场和温度场剪切的关系, 为此将二阶张量关系式(9)展开成矩阵形式:

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j} = \rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$= -\rho \begin{pmatrix} K_{11} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) & K_{12} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) & K_{13} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ K_{21} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) & K_{22} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) & K_{23} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ K_{31} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{W}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) & K_{32} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{W}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) & K_{33} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{pmatrix},$$

其中 U, V, W 分别为 x, y, z 方向上速度三分量.

湍流脉动导致动量湍流输送, 考虑湍流黏性应力张量的对称性, 那么各方向上动量湍流输送通量分别为

$$\rho \overline{u'v'} = \rho \overline{v'u'} = -\rho K_{xy} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (11)$$

$$\rho \overline{u'w'} = \rho \overline{w'u'} = -\rho K_{xz} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (12)$$

其中令($K_{xy}=K_{12}=K_{21}$, $K_{xz}=K_{13}=K_{31}$, $K_{yz}=K_{23}=K_{32}$), 且令风向指向 x 轴. K_{xy} 和 K_{xz} 是湍流输送系数. 由矩阵(10)的对角线得到各方向上湍流强度分别为

$$\overline{u'^2} = -K_{11} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (13)$$

$$\overline{v'^2} = -K_{22} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (14)$$

$$\overline{w'^2} = -K_{33} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (15)$$

其中 K_{ii} 是湍流强度唯象系数. (11)和(12)式为非平衡态线性热力学导出的水平方向和垂直方向动量湍流输送通量公式, 可以称之为动量湍流输送定理. (13)~(15)式是非平衡态线性热力学导出的一个有关湍流强度的重要定理, 它揭示了湍流强度同流体速度场和温度场剪切的关系, 可以称之为湍流强度定理. 湍流的宏观特征主要是流场的脉动特征及流场脉动对物质和能量的输运效应. (9)~(15)式表明, 湍流强度和动量湍流输送通量各方向分量不仅是该方向对应的速度梯度的函数, 而且是该方向温度梯度的函数; (9)~(15)式揭示了一个极为重要的事实, 即湍流强度和动量湍流输送通量(广义流)都是流体速度场和温度场的剪切效应(广义力)共同作用的结果; 非平衡态热力学认为广义力是广义流发展的原因, 所以流体速度场和温度场的剪切效应是湍流发展的原因. 这就从非平衡态热力学证明了 Reynolds 湍流和 Rayleigh-Bénard 湍流共存于大气系统, 并揭示湍流的宏观原因是速度场和温度场的剪切效应. 张量关系式(9)的对角线, 即令 $i=j$ 时得到的湍流强度定理矢量形式为

$$\overline{u_{ii}'} = -K_{ii} \left(\nabla \cdot \vec{U} - \frac{1}{T} \vec{U} \cdot \nabla T \right). \quad (16)$$

(16)式指出, 湍流强度正比于速度散度与速度同温度梯度标积之代数积. 如果大气是不可压缩性流体

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \text{则湍流强度定理简化为}$$

$$\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} = K \frac{1}{T} \vec{U} \cdot \nabla T = K_{ii} \frac{1}{T} U_i \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (17)$$

(17)式表明, 对于不可压缩流体, 湍流强度正比于速度与温度梯度的标积. 事实上这就是 Rayleigh-Bénard 湍流的强度. 它揭示出湍流源于温度剪切效应, 这意味着强局地温度剪切效应能产生湍流.

如果大气系统温度的相对梯度远小于速度相对梯度

$$\left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) / \left(\frac{1}{U_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \ll 1, \quad (18)$$

则(9)式简化成

$$\tau_{ij} = -\rho K_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (19)$$

这时动量湍流输送通量和湍流强度分别为

$$\overline{\rho u'v'} = -\rho K_{xy} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \overline{\rho u'w'} = -\rho K_{xz} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (20)$$

$$\overline{u'^2} = -K_{11} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \overline{v'^2} = -K_{22} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \overline{w'^2} = -K_{33} \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (21)$$

(20)式就是经典 K 湍流闭合理论中的动量湍流输送通量形式. 当大气系统满足(18)式的条件时, 动量湍流输送通量和湍流强度仅同该方向相关宏观平均量梯度成正比, 而同该方向温度梯度无关. 但当大气系统不满足(18)式的条件时, 如在强热力非均匀下垫面或强热力层结不稳定条件下, 动量湍流输送通量和湍流强度就必须考虑温度梯度对动量湍流输送通量和湍流强度的影响.

(19)式或(20)和(21)式是 Reynolds 动量湍流输送通量和湍流强度定理的形式; 而(17)式是 Rayleigh-Bénard 湍流强度定理的形式. 那么, (9)式或(11)~(15)式则是 Reynolds 湍流和 Rayleigh-Bénard 湍流共存时动量湍流输送通量和湍流强度定理的形式, 并证明 Reynolds 湍流和 Rayleigh-Bénard 湍流共存于大气系统中. 传统湍流理论已认识到湍流是流体剪切效应产生的一种涡旋运动; 现代混沌动力学理论认为湍流是相空间无序的混沌系统, 它是相空间轨线不断拉伸和折叠竞争经过混沌发展而产生的一种空间和时间无序结构. 现代非平衡态热力学导出了动量湍流输送定理和湍流强度定理, 它直接证明产生湍流的宏观原因是流体速度场和温度场的剪切效应, 将 Reynolds 湍流和 Rayleigh-Bénard 湍流统一表述于动量湍流输送定理和湍流强度定理中. 流体速度场和温度场的剪切效应同混沌动力学理论相空间轨线拉伸和折叠效应, 在本质上是一致的. 由于速度场和温度场的剪切性, 经过流体系统的非线性动力过程, 即产生相空间轨线拉伸和折叠效应, 从而造成系统的时间和空间无序结构.

人们熟知的动量湍流输送通量公式早已被大量观测事实所证实. 而湍流强度定理首次利用大气非平衡态热力学得到证明; 湍流强度定理指出, 湍流强度, 即湍流动能是速度梯度和温度梯度的函数; 湍流强度定理定量地描述了涡旋运动的强弱或时间和空间无序的程度; 并证明非均匀性是湍流之源, 以热力

学的观点揭示出湍流发展的宏观原因. 湍流强度定理是非平衡态线性热力学推导得到的一个理论结论, 它必须由观测实验事实验证, 而且一些湍流强度唯象系数也必须由观测实验确定.

2 湍流强度定理的实验验证及其唯象系数的确定

2.1 湍流强度定理的实验验证方案和资料来源

如果实验已经观测到(13)~(15)式中 z 高度上湍流强度 ($\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$), 对应的速度梯度 $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)$ 和相应的位温梯度 $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)$ 以及位温 θ , 那么就可以从(13)~(15)式确定湍流强度唯象系数 K_{ii} 为

$$K_{11} = -\frac{\overline{u'^2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)}, \quad (22)$$

$$K_{22} = -\frac{\overline{v'^2}}{\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{V}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)}, \quad (23)$$

$$K_{33} = -\frac{\overline{w'^2}}{\left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)}. \quad (24)$$

为了从观测实验资料确定湍流强度唯象系数 K_{ii} , 利用物理相似性 量纲原理分析 K_{ii} 的可能形式是有益的. 大气系统速度特征量为摩擦速度 u_* ; 长度特征量为表征热力层结稳定度的 Monin-Obukhov 长度 L . (22)~(24)式量纲分析表明, K_{ii} 具有量纲($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), 且 K_{ii} 可能是速度梯度和温度梯度的函数; 由此可定义

$$\text{无量纲量 } \pi_1 = -\frac{K_{ii}}{u_* L} \text{ 和 } \pi_2 = \frac{L}{u_*} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{U_i}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right), \text{ 根据}$$

量纲原理有相似性关系式

$$\pi_1 = \varphi_{ii}(\pi_2), \text{ 即 } K_{ii} = -u_* L \varphi_{ii}(\pi_2). \quad (25)$$

可以利用大气边界层观测实验资料确定有关特征量 u_* 和 L 以及(25)式中 $\varphi_{ii}(\pi_2)$ 的具体函数形式. 但由于我们目前仅有平均垂直速度梯度资料, 而无平均水平速度梯度观测资料, 所以只能验证湍流强度 $\overline{w'^2}$ 的关系式, 即相似性函数 $\varphi_{33}(\pi_2)$ 为

$$\pi_1 = \varphi_{33}(\pi_2) = -\frac{K_{33}}{u_* L}, \quad \pi_2 = \frac{L}{u_*} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right). \quad (26)$$

利用经典的近地面层 Monin-Obukhov 相似性理论及 Businger-Dyer 关系计算(26)式中所需要的特征量 u_* 和 L 为^[27]

$$u_* = \frac{\kappa(z-d)}{\Phi_M} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (27)$$

$$\Phi_M = \begin{cases} (1 - \alpha_M(z/L))^{-1/4}, & z/L < 0, \\ 1 + \beta_M(z/L), & z/L > 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$z/L = \begin{cases} 1.0R_i, & R_i < 0, \\ R_i / (1.0 - 5.0R_i), & R_i > 0, \end{cases} \quad (29)$$

其中 R_i 是梯度 Richardson 数, $R_i = \frac{g \partial \theta / \partial z}{\theta (\partial u / \partial z)^2}$,

Kármán 常数 $\kappa = 0.40$, Φ_M 是 Monin-Obukhov 相似性通用函数. 相似性通用函数中的参数采用 Businger 等人 1971 所得结果, 分别取 $\alpha_M = 19.3$, $\beta_M = 6.0$ ^[27]. 利用目前掌握的 Högström^[28]提供的 Uppsala 大学 1986 年近地面层湍流观测资料, 确定湍流强度关系式(26)的唯象系数 K_{33} , 实验资料的细节文献[28]有详述.

2.2 湍流强度 $\overline{w'^2}$ 及其唯象系数 K_{33} 的性质

将归一化资料按照 $z/L > 0.01$, $-0.01 < z/L < 0.01$ 和 $z/L < -0.01$ 分为稳定层结、中性层结和不稳定层结分别处理. 首先利用(27)~(29)式计算所有参数, 然后用(24)式计算 K_{33} , 同时用(26)式计算相似性函数 $\varphi_{33}(\pi_2)$ 和 π_2 ; 最后以 φ_{33} 作为 π_2 的函数做图. 图 1(a)和(b)分别为不稳定层结和稳定层结条件下的结果. 图 1(a)和(b)表明, 函数 φ_{33} 被坐标轴分割成对称的两支, 分别位于第一和第三象限, 而且当 $\pi_2 \rightarrow 0$ 时, $\varphi_{33} \rightarrow \pm\infty$, 当 $\pi_2 \rightarrow \pm\infty$ 时, $\varphi_{33} \rightarrow 0$, π_2 和 φ_{33} 正负号一致. 判断这是一组等轴双曲线型函数, 即令 $x = \pi_2$ 和 $y = \varphi_{33}(\pi_2) = -K_{33} / u_* L$, 则 $xy = C$ (C 为常数), 所以有

$$\varphi_{33} \pi_2 = C, \text{ 即 } \varphi_{33} = C \pi_2^{-1} = C \left[\frac{L}{u_*} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \right]^{-1}. \quad (30)$$

其中常数 C 是双曲线型函数的参数, 它也是一个无因次参数. 为此图 1 中给出了 φ_{33} 和 $\pi_2 = \frac{L}{u_*}$.

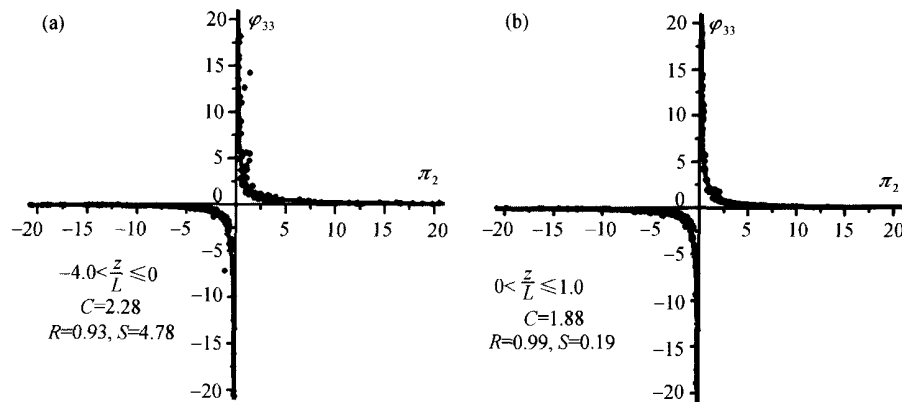


图 1 $\varphi_{33} = -\frac{K_{33}}{u_* L}$ 作为 $\pi_2 = \frac{L}{u_*} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$ 的函数关系

(a) 不稳定层结; (b) 稳定层结

$\left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$ 的双曲线型函数拟合曲线及双曲线型函数的参数 C 的值; 同时列出了拟合曲线的相关系数 R 和残差 S . 两图的结果显示拟合曲线都具有很高的相关性, 其相关系数能达 0.93 和 0.99.

结果显示, 双曲线型函数参数 C 是热力层结稳定度的函数, 预计无因次参数 C 可能是 Monin-Obukhov 大气稳定度参数 z/L 的函数, 即

$$C = \phi\left(\frac{z}{L}\right), \quad (31)$$

则

$$\varphi_{33} = \phi\left(\frac{z}{L}\right) \left[\frac{L}{u_*} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right]^{-1}. \quad (32)$$

这一关系表明, 湍流强度唯象系数的相似性函数 φ_{33} 不仅是速度剪切的函数, 而且是大气温度热力层结稳定度的函数. 由(26)式和湍流强度唯象系数的相似性函数(32)式 φ_{33} 得到湍流强度唯象系数 K_{33} 的表达式为

$$K_{33} = -u_*^2 \phi\left(\frac{z}{L}\right) \left[\left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right]^{-1}. \quad (33)$$

另一方面, 将上面湍流强度唯象系数 K_{33} 的表达式(33)代入计算湍流强度的公式(15), 则得到:

$$\frac{\overline{w'^2}}{u_*^2} = C = \phi\left(\frac{z}{L}\right). \quad (34)$$

(34)式与(5)式完全一致. 值得注意的是, (5)式是根据 Monin-Obukhov 大气边界层相似性理论和大量野外

观测实验得到的经验关系; 而(34)式是由湍流强度定理(13)~(15)式和野外观测资料获得. 这种一致性意味着以观测实验事实证明了湍流强度定理的真实性; 反之也是从理论上利用非平衡态线性热力学间接地证明了 Monin-Obukhov 湍流强度经验关系. 所以(34)式就是湍流强度相似性关系, $\phi(z/L)$ 是湍流强度相似性函数.

(32)~(34)式指出, 只要确定湍流强度相似性函数 $\phi(z/L)$ 的形式, 即可求唯象系数的相似性函数 φ_{33} 、唯象系数 K_{33} 以及湍流强度 $\overline{w'^2}$.

2.3 湍流强度相似性函数 $\phi(z/L)$ 的形式

由上面计算确定的湍流强度唯象系数的相似性函数 φ_{33} 可以进一步确定湍流强度相似性函数 $\phi(z/L)$ 具体形式. 从(33)式得到湍流强度相似性函数

$$\phi\left(\frac{z}{L}\right) = \varphi_{33} \frac{L}{u_*} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad \varphi_{33} = -\frac{K_{33}}{u_* L}. \quad (35)$$

由所选资料得到的 ϕ 作为 $\frac{z}{L}$ 的函数, 绘成图 2, 最后得到湍流强度相似性函数 $\phi(z/L)$ 在不稳定层结 ($-3 < z/L < -0.01$)、近中性层结 ($-0.01 < z/L < 0.01$) 和稳定层结 ($0.01 < z/L < 1$) 条件下的具体形式为

$$\phi(z/L) = \begin{cases} 1.35(1-1.9z/L)^{2/3}, & -3 < z/L < -0.01, \\ 1.3, & -0.01 < z/L < 0.01, \\ 1.8+(8.1z/L)^{5/2}, & 0.01 < z/L < 1. \end{cases} \quad (36)$$

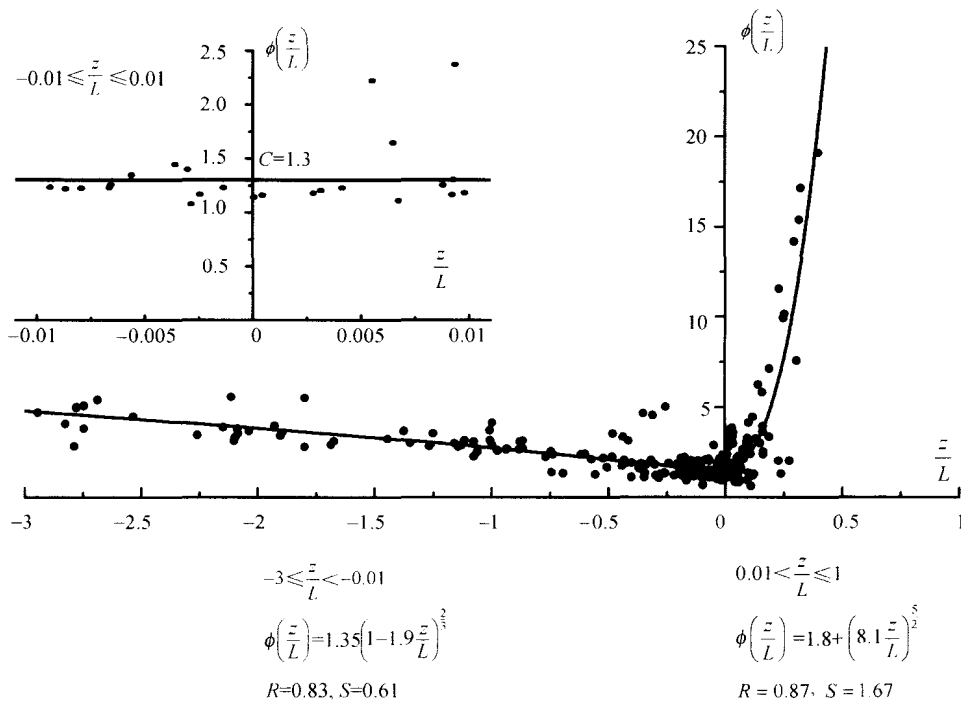


图 2 $\phi(z/L)$ 作为 (z/L) 的函数
左上角为近中性层结 $(-0.01 \leq z/L \leq 0.01)$ 情况的放大图

结果表明, 所得到的湍流强度相似性函数 $\phi(z/L)$ 具有如同(6)式类似形式. 即不稳定层结相似性函数 $\phi \sim (z/L)^{2/3}$, 近中性层结相似性函数为常数 $\phi \sim 1.3$; 但稳定层结条件下情况较复杂 $\phi \sim (z/L)^{5/2}$. 湍流强度相似性函数 $\phi(z/L)$ 拟合曲线的相关系数 R 和残差 S 也列于图 2 中.

3 湍流强度定理的进一步验证

现利用湍流强度相似性函数 $\phi(z/L)$ (36)式和相似性关系(34)式计算湍流强度 $\overline{w_C'^2}$ 同实测湍流强度 $\overline{w'^2}$ 比较, 以便检验湍流强度唯象系数 K_{33} 结果的可信度和真实性, 从而以观测资料验证湍流强度定理. 将(36)式代入(34)式得到非平衡态热力学湍流强度定理计算湍流强度的公式为

$$\overline{w_C'^2} = \begin{cases} 1.35(1-1.9z/L)^{2/3} u_*^2, & -3 \leq z/L < -0.01, \\ 1.3u_*^3, & -0.01 \leq z/L \leq 0.01, \\ [1.8 + (8.1z/L)^{5/2}] u_*^2, & 0.01 < z/L \leq 1. \end{cases} \quad (37)$$

图 3 是湍流强度定理计算得到的湍流强度 $\overline{w_C'^2}$ 同实测湍流强度 $\overline{w'^2}$ 的比较图, 图 3(a)~(c)分别是不稳

定层结、稳定层结和近中性层结条件下的情况. 图中 D 是资料拟合出来的斜率, 表征计算得到的湍流强度 $\overline{w_C'^2}$ 与实测湍流强度 $\overline{w'^2}$ 的偏离程度; R 和 S 分别是计算湍流强度同实测湍流强度的相关系数和残差. 结果显示计算得到的湍流强度 $\overline{w_C'^2}$ 同实测湍流强度 $\overline{w'^2}$ 具有相当好的一致性, 从而以观测事实验证了湍流强度定理的真实性.

4 结论

湍流至今仍是经典物理学中一个难以理解的谜, 其形成机制还未能得到完美解释. 传统湍流理论证明自然界流体存在由于速度剪切产生的 Reynolds 湍流, 由于温度剪切产生的 Rayleigh-Bénard 湍流, 这是两类性质不同的湍流. 现代混沌理论发展起来的湍流动力学理论认为, 湍流是在极大自由度数的混沌系统中相空间轨线不断拉伸和折叠竞争, 经过混沌发展而产生的一种时间和空间无序结构. 非平衡态热力学本质上研究的是自由度极大的系统, 本文利用大气非平衡态线性热力学理论将 Reynolds 湍流和 Rayleigh-Bénard 湍流统一表述在动量湍流输送定理和湍流强度定理中, 证明了 Reynolds 湍流和

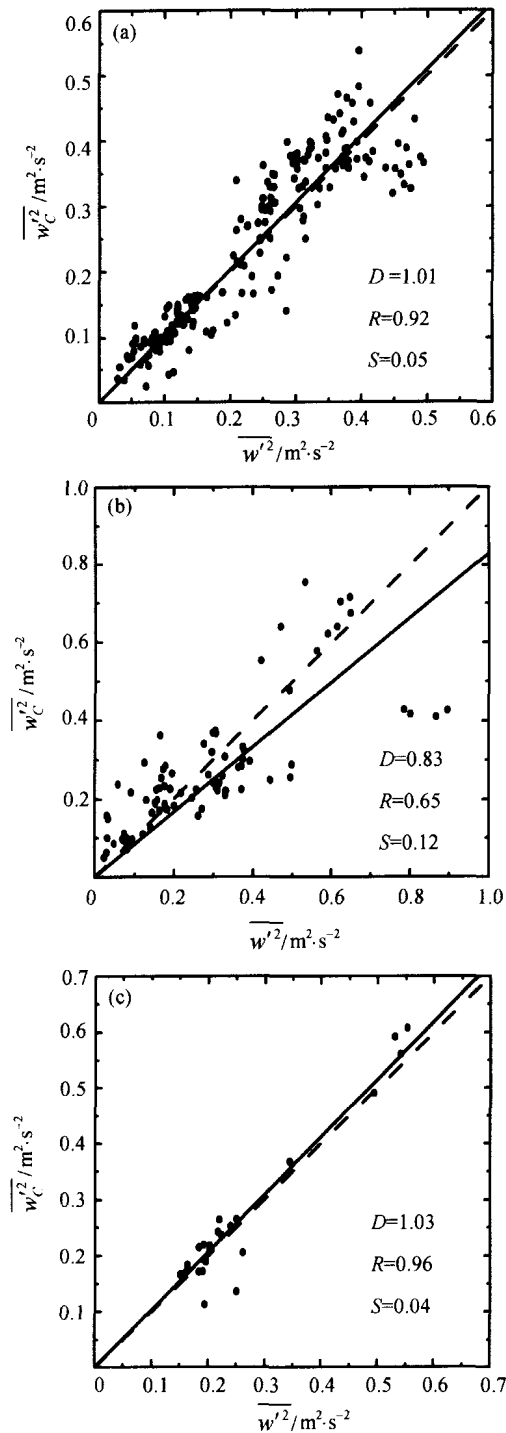


图 3 湍流强度定理计算得到的湍流强度 $\overline{w_c'^2}$ 同实测湍流强度 $\overline{w'^2}$ 比较

(a) $-3 < z/L < -0.01$; (b) $-0.01 < z/L < 0.01$; (c) $0.01 < z/L < 1$

Rayleigh-Bénard 湍流共存于大气系统, 认为湍流发展的宏观原因是速度剪切效应和温度剪切效应共同作用的结果, 速度剪切效应和温度剪切效应也是相

空间轨线不断拉伸和折叠的宏观原因. 并进一步以大气野外观测资料证明了湍流强度定理的真实性, 同时证明了湍流强度唯象系数不仅是速度剪切的函数, 而且也是大气温度热力层结稳定度的函数. 这就以观测事实证明湍流发展的宏观原因是速度剪切效应和温度剪切效应共同作用的结果.

致谢 Högström 教授为本文的完成提供了详实的观测实验资料, 使本项工作得以顺利进行, 在此表示诚挚的感谢.

参 考 文 献

- 1 Friedrich H B. Visualizing the dynamics of the onset of turbulence. *Science*, 2004, 305: 1574—1575
- 2 Björn H, Casimir W H, van Doorne, et al. Waves in turbulent pipe flow. *Science*, 2004, 305: 1594—1598
- 3 Boris I S, Eric D S. Scalar turbulence. *Nature*, 2000, 405: 639—646
- 4 James A G, Takehiko S, Antoine N, et al. Evidence against ‘ultrahard’ thermal turbulence at very high Rayleigh numbers. *Nature*, 1999, 398: 307—310
- 5 Groisman A, Steinberg V. Elastic turbulence in a polymer solution flow. *Nature*, 2000, 405: 53—55
- 6 Bramwell S T, Holdsworth P C W, Pinton J F. Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena. *Nature*, 1998, 396: 552—554
- 7 L'vov V S. Universality of turbulence. *Nature*, 1998, 396: 519—521
- 8 Hinze J O. *Turbulence*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1959. 586
- 9 胡隐樵. 大气热力动力学导论. 北京: 地质出版社, 2002. 406
- 10 Swinney H L, Gollub J P. *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1981. 292
- 11 Kolmogorov A N. Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very high Reynolds numbers. *C R Acad Sci URSS*, 1941, 30: 301—305
- 12 Monin A S, Obukhov A M. Basic laws of turbulent mixing in the atmosphere near the ground. *Tr Akad Nauk SSSR Geofiz Inst*, 1954, 24 (151): 163—187
- 13 Panofsky H A, Dutton J A. *Atmospheric Turbulence*. New York: John Wiley and Sons, 1983. 160—162
- 14 Sorbjan Z. *Structure of the Atmospheric of Boundary Layer*. London: Prentice-Hall, 1989. 70—76
- 15 Monin A S, Yaglom A M. *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. 1. London: MIT Press, 1971
- 16 Monin A S, Yaglom A M. *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. 2. London: MIT Press, 1975
- 17 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J Atoms Sci*, 1963, 28: 130—141

- 18 Bohr T, Jensen M H, Paladin G, et al. *Dynamical Systems Approach to Turbulence*. London: Cambridge University Press, 1998. 350
- 19 Chen H, Sathesh K, Steven O, et al. Extended boltzmann kinetic equation for turbulent flows. *Science*, 2003, 301: 633—636.
- 20 Sincell M. Electromagnetic waves may cut turbulence. *ScienceNOW*, 2000, 2000(522): 1
- 21 Prigogine I. *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes*. 3rd ed. New York: Interscience Publishers, a Division of John Wiley and Sons, 1967
- 22 胡隐樵. 强迫耗散系统的有序结构和系统的发展(), 最小熵产生原理和有序结构. *物理学报*, 2003, 52: 1379—1384
- 23 胡隐樵. 强迫耗散系统的有序结构和系统的发展(), 广义能量极小值原理和系统的发展. *物理学报*, 2003, 52(6): 1354—1359
- 24 Hu Y Q. Application of the linear thermodynamics to atmosphere system (I), Linear phenomenological relation and thermodynamic property of the atmosphere. *Adv Atmos Sci*, 2002, 19(3): 448—458
- 25 Hu Y Q. Application of the linear thermodynamics to atmosphere system (II), Exemplification of the leaner phenomenological relation in the atmosphere system. *Adv Atmos Sci*, 2002, 19(5): 767—776
- 26 Hu Y Q. Convergence movement influence on the turbulent transportation in atmospheric boundary layer. *Adv Atmos Sci*, 2003, 20(5): 794—798
- 27 Businger J A, Wyngaard J C, Izumi Y, et al. Flux profile relationship in the atmospheric surface layer. *J Atmos Sci*, 1971, 28: 181—189
- 28 Högström U. Non-dimensional wind and temperature profiles in the atmospheric surface: a re-evaluation. *Bound-Layer Meteor*, 1988, 42: 55—78